Productivité totale des facteurs[1]

Jean-Marie Harribey

La productivité totale des facteurs (PTF) est une mesure du « résidu » de la croissance lorsqu'on décompose le taux de croissance obtenu à partir d'une fonction de production Cobb-Douglas à rendements constants. Elle est voisine de la productivité globale.[2]

Outre qu'elle peut être considérée comme ce « résidu » de la croissance, la PTF se définit aussi comme la moyenne arithmétique de la productivité du travail pondérée par la part des salaires dans la valeur ajoutée et de l'efficacité du capital (dite productivité[3]) pondérée par la part des profits dans la valeur ajoutée.

Soit $Q = \mathrm{F}(K, L, t)$ (1)

par exemple : $Q_t = A_t K_t^{\,a} L_t^{\,1-a}$ (2)

Définition

La dérivée logarithmique par rapport au temps d'une variable x est égale au rapport de la dérivée de x par rapport au temps et de x : $\mathrm{dLog}x / \mathrm{d}t = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t) / x = x'/x$. Or cela est aussi égal au taux de croissance de cette variable que l'on note ici : $\underline{x}$.

Pour alléger les notations, on enlève les indices t dans (2).

$$\mathrm{Log}\, Q = \mathrm{Log}\, A + a\, \mathrm{Log}\, K + (1 - a)\, \mathrm{Log}\, L$$

$$\frac{\mathrm{dLog}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{dLog}A}{\mathrm{d}t} + a\frac{\mathrm{dLog}K}{\mathrm{d}t} + (1-a)\frac{\mathrm{dLog}L}{\mathrm{d}t}$$

$$\underline{Q} = \underline{A} + a\underline{K} + (1 - a)\underline{L} \qquad (3)$$

$\underline{A}$ est le taux de croissance de la PTF ou « progrès technique »[4] :

$$\underline{A} = \underline{Q} - a\underline{K} - (1 - a)\underline{L}$$
$$= \underline{Q} - a\underline{K} - (1 - a)\underline{L} + a\underline{Q} - a\underline{Q} = a\underline{Q} - a\underline{K} + \underline{Q} - a\underline{Q} - \underline{L} + a\underline{L}$$
$$= a(\underline{Q} - \underline{K}) + (1 - a)(\underline{Q} - \underline{L}) \qquad (4)$$

= taux de variation de la productivité du capitalpondéré par la part du capital dans le revenu + taux de variation de la productivité du travail pondéré par la part du travail dans le revenu.

Ainsi on peut décomposer le taux de croissance économique comme la somme du taux de variation de la quantité de capital pondérée par la part du capital dans le revenu, du taux de variation de la quantité de travail pondérée par la part du travail, dans le revenu, du taux de variation de la productivité du capital pondérée par la part du capital dans le revenu et du taux de variation de la productivité du travail pondérée par la part du travail dans le revenu :

$$\underline{Q} = a\underline{K} + (1 - a)\underline{L} + a(\underline{Q} - \underline{K}) + (1 - \underline{a})(\underline{Q} - \underline{L}) \qquad \text{(3bis)}$$

---

[1] . Pour un complément voir J.M. Harribey, « Valeur, prix de (re)production et développement économique », Document de travail n° 58 du CED, Université Bordeaux IV, 2001, http://harribey.u-bordeaux4.fr/travaux/valeur/valeur-developpement.pdf. Voir aussi le dossier « La fonction de production dans l'analyse néo-classique », http://harribey.u-bordeaux4.fr/cours/fonction-production.pdf.

[2] . Voir P. Dubois, « Production et productivité », *in* X. Greffe, J. Mairesse, J.L. Reiffers, *Encyclopédie économique*, Paris, Economica, 1990, tome 1, p. 817-846. La productivité totale des facteurs est obtenue à partir de la moyenne géométrique pondérée de l'évolution du volume de chaque facteur, tandis que la productivité globale s'obtient à partir de leur moyenne arithmétique.

[3] . On utilise ensuite ici l'expression « productivité du capital », qui est celle utilisée dans la littérature économique, mais elle n'a aucun sens ; il vaudrait mieux parler d'« efficacité du capital ».

[4] . En réalité, il faut aussi inclure dans la PTF le rôle des institutions et des infrastructures.

Autre manière de procéder à partir de (1) :

$$\dot{Q}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\frac{\dot{Q}}{Q}=\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\frac{1}{K}+\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{L}+\frac{\partial Q}{\partial t}\frac{1}{Q}$$

Si les rendements sont constants, en vertu du théorème d'Euler :

$$Q=\frac{\partial Q}{\partial K}K+\frac{\partial Q}{\partial L}L$$

avec $\frac{\partial Q}{\partial K}=i$ et $\frac{\partial Q}{\partial L}=w$, c'est-à-dire les taux de rémunération du capital et du travail ou encore leurs productivités marginales.

Alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial K}K=aK^{a-1}L^{1-a}K=aQ$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L}L=(1-a)K^{a}L^{1-a-1}L=(1-a)Q$$

D'où :

$$\underline{Q}=\frac{\dot{Q}}{Q}=a\frac{Q}{Q}\frac{\dot{K}}{K}+(1-a)\frac{Q}{Q}\frac{\dot{L}}{L}+\frac{\partial Q}{\partial t}\frac{1}{Q}=a\frac{\dot{K}}{K}+(1-a)\frac{\dot{L}}{L}+\frac{\partial Q}{\partial t}\frac{1}{Q}$$

$\underline{Q} = a\underline{K} + (1-a)\underline{L} + (\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t) / Q$ (3 ter)

Le taux de croissance de la PTF : $(\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t) / Q = \underline{Q} - a\underline{K} - (1-a)\underline{L}$ (4bis)

Optique de la répartition

Production = profits + salaires

$Q = iK + wL$

$$\dot{Q}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=iK\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{1}{i}+iK\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\frac{1}{K}+wL\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\frac{1}{w}+wL\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{L}$$

$$=iK\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{1}{i}+\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\frac{1}{K}\right)+wL\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\frac{1}{w}+\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{L}\right)$$

$$\underline{Q}=\frac{\dot{Q}}{Q}=\frac{iK}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{1}{i}+\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\frac{1}{K}\right)+\frac{wL}{Q}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\frac{1}{w}+\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{L}\right)$$

$= a\,(\underline{i} + \underline{K}) + (1-a)\,(\underline{w} + \underline{L})$

$= a\underline{i} + a\underline{K} + (1-a)\,\underline{w} + (1-a)\,\underline{L}$

$= a\underline{K} + (1-a)\,\underline{L} + a\underline{i} + (1-a)\,\underline{w}$ (5)

D'où :

$\underline{Q} - a\underline{K} - (1-a)\,\underline{L} = a\underline{i} + (1-a)\,\underline{w}$

Le membre de gauche est la différence entre le taux de croissance économique et les taux de croissance des facteurs de production pondérés par leur part dans le produit total. Cette différence est le taux de croissance de la PTF sous sa forme primale.

Le membre de droite représente le taux de croissance de la PTF sous sa forme duale.

Remarques

Si on compare les équations (3bis) et (5)

$\underline{Q} = a\underline{K} + (1-a)\underline{L} + a(\underline{Q} - \underline{K}) + (1-\underline{a})\,(\underline{Q} - \underline{L})$ (3bis)

$\underline{Q} = a\underline{K} + (1-a)\,\underline{L} + a\underline{i} + (1-a)\,\underline{w}$ (5)

alors : $a(\underline{Q} - \underline{K}) + (1-\underline{a})\,(\underline{Q} - \underline{L}) = a\underline{i} + (1-a)\,\underline{w}$ (6) qui n'est autre que le taux de croissance de la PTF $\underline{A}$

d'où : $i = \underline{Q} - \underline{K}$ et $\underline{w} = \underline{Q} - \underline{L}$, c'est-à-dire la répartition n'est pas modifiée si le taux de variation de la rémunération du capital est égal à celui de la « productivité du capital » et si le taux de variation du salaire est égal à celui de la productivité du travail.

Si on compare les équations (3) et (5)

$\underline{Q} = \underline{A} + a\underline{K} + (1 - a)\underline{L}$ (3)

$\underline{Q} = a\underline{K} + (1- a)\,\underline{L} + a\underline{i} + (1- a)\,\underline{w}$ (5)

alors $\underline{A} = a\underline{i} + (1- a)\,\underline{w}$ et on retrouve le résultat (6)

Application de la PTF[5]

Si $a = 1/3$,
la production augmente de 5% = 0,05,
la quantité de capital augmente de 5%= 0,05,
celle de travail augmente de 1% = 0,01,

alors :
l'augmentation de la PTF est : $\underline{Q} - a\underline{K} - (1-a)\underline{L}$ équation (3)

$0,05 - 1/3 \,.\, 0,05 - 2/3 \,.\, 0,01 = 2,67\%$

Supposons qu'il n'y ait pas de progrès technique. Pour avoir la même croissance de la production, avec une croissance identique de 1% de la population active, il faudrait une augmentation du volume de capital :

$a\underline{K} = \underline{Q} - (1-a)\underline{L} = 0,05 - 2/3 \,.\, 0,01 = 0,0433$

d'où $\underline{K} = 3 \,.\, 0,0433 = 13\%$.

Une telle croissance du capital (pour un travail dont le volume n'augmente que de 1% comme initialement) va provoquer une baisse de la productivité marginale du capital. Celle-ci étant le rapport de la variation de la production et de celle du capital, elle sera mesurée par la différence entre le taux de croissance économique et le taux de croissance du capital :

$$\underline{Q} - \underline{K} = a\underline{K} + (1-a)\underline{L} - \underline{K} = a\underline{K} - \underline{K} + (1 - a)\underline{L} = -(1 - a)\,\underline{K} + (1 - a)\underline{L} = (1 - a)\,(\underline{L} - \underline{K})$$
$$= (1 - 1/3)\,(0,01 - 0,13) = 2/3 \,.\, (-0,12) = -0,08 = -8\%.$$

Le taux de profit s'en ressentira.

Pour éviter cela, le progrès technique doit suppléer la substitution du capital au travail.

Pour que la productivité marginale du capital se maintienne, il faut que :

$\underline{Q} - \underline{K} = 0$, c'est-à-dire :

$\underline{A} + a\underline{K} + (1-a)\underline{L} - \underline{K} = 0 \Leftrightarrow \underline{A} = (1 - a)\,(\underline{K} - \underline{L}) = 8\%$.

[5] . Cette application s'inspire de celle de A. Parienty, « La mesure de la productivité des facteurs », IDEES, n° 133, octobre 2003, p. 30-35.